

Sayısal Yarıgruplar ve Arf

Halil İbrahim Karakaş

Başkent Üniversitesi

karakas@baskent.edu.tr

Özet

Alışıldığı üzere $\mathbb{Z}$, tamsayılar kümesini; $\mathbb{N}$, pozitif tamsayılar kümesini gösterebiliriz ve $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olsun. $S \subseteq \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 \setminus S$ sonlu ve $0 \in S$ ise, S 'ye *sayısal küme* denir. S sayısal kümesi toplama işlemine göre kapalı, yani $a, b \in S \Rightarrow a + b \in S$, ise S 'ye *sayısal yarıgrup* denir.

Sayısal yarıgrupların ilk kez *Diophant* denklemlerin negatif olmayan tamsayı çözümleri araştırılırken ele alındığı tahmin edilir. $a_1, a_2, \dots, a_n$ ortak bölenlerinin en büyüğü 1 olan pozitif tamsayılar olmak üzere

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = x \quad (1)$$

denkleminin negatif olmayan tamsayı çözümlere sahip olduğu $x \in \mathbb{N}_0$ sayıları bir sayısal yarıgrup oluştururlar. Bu bağlamda en önemli problemlerden biri, (1) denkleminin negatif olmayan tamsayı çözüme sahip olmadığı en büyük x tamsayısını $a_1, a_2, \dots, a_n$ cinsinden ifade etmektir. Bu problem, F. G. Frobenius'un derslerinde öğrencilerine söz konusu sayı için $a_1, a_2, \dots, a_n$ cinsinden bir formül bulmalarını önermesi nedeniyle *Frobenius problemi* olarak bilinmektedir.

Sayısal yarıgruplar cebirsel geometri, kodlama teorisi gibi alanlardaki uygulamalar ve kendi başlarına da ilginçlikleri nedeniyle son zamanlarda üzerinde en çok çalışılan konulardan biri haline gelmiştir.

Bu konuşmada, sayısal yarıgruplarla ilgili olarak *kathlık*, *gömme boyutu*, *boşluklar*, *cins(genus)*, *Frobenius sayısı*, *önder(kondüktör)*, *çakma Frobenius sayıları*, *tip*, *küçük elemanlar*, *Apery kümesi* gibi kelime ve kavramlar tanıtıldıktan sonra *Wilf sanısı(Wilf conjecture)* gibi bazı açık soruların güncel durumundan bahsedilecektir. Ayrıca, *Arf yarıgrupları*, *maksimal gömme boyutlu sayısal yarıgruplar*, *indirgenemez sayısal yarıgruplar* gibi yarıgrup aileleri hakkında yapılan ve yapılabilecek çalışmalardan bahsedilecektir.

Kaynaklar

- [1] J. L. R. Alfonsin, The Diophantine Frobenius Problem, Oxford University Press, 2005.
- [2] A. Assi, P. A. Garcia-Sanchez, Numerical Semigroups and Applications, Springer, 2016.
- [3] V. Barucci, D. E. Dobbs, and M. Fontana, Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analytically irreducible local domains, *Memoirs of the American Mathematical Society* 125/598 (1997), 1 - 77.
- [4] R. Fröberg, C. Gottlieb, and R. Haggkvist, On numerical semigroups, *Semigroup Forum* 35 (1987), 63 - 83.
- [5] J. C. Rosales and P. A. Garcia-Sanchez, Numerical Semigroups, Springer, 2009.